Aplicaciones de la derivada

1. La altura $h(t)$ con respecto al tiempo de una pelota que se deja caer libremente desde la terraza de un edificio, está dada por: $h(t) = 50 - 4{,}9t^2$ donde $h(t)$ está expresada en metros y t en segundos.

a. ¿Cuál es la altura del edificio?
$h(t) = 50 - 4{,}9t^2$
$h(0) = 50 – 4{,}9\ (0)^2$
$h(0) = 50$ m

b. Encontrar una expresión general para la velocidad de la pelota en cualquier Instante.
$h(t) = 50 - 4{,}9t^2$
$v(t) = -9.8\ t$

c. Determinar la velocidad de la pelota a los 2 segundos después de haberse dejado caer.
$v(t) = -9.8\ t$
$v(2) = -9.8\ (2)$
$v\ (2) = -19{,}6$

d. ¿Cuándo llega la pelota al suelo?
Se toca el suelo, cuando h= 0
$h(t) = 50 - 4{,}9t^2$
$0 = 50 - 4{,}9t^2$
$50 = 4{,}9t^2$
$\frac{50}{4{,}9} = t^2$
$t = \pm\sqrt{\frac{50}{4{,}9}}$
$t = \pm 3{,}19\ seg$
$t = 3.19\ seg$

e. ¿Con que velocidad choca la pelota contra el suelo?
$v(t) = -9.8\ t$
$v(t) = -9.8(3{,}19)$
$v(t) = -\ 31{,}26$

2. Se lanza una roca verticalmente hacia arriba, desde la superficie lunar, a una velocidad de 24 $m/\ seg$. La altura $s(t)$ de la roca, en metros, respecto a la superficie para cualquier instante t, en segundos, es: $s(t) = 24t - 0,8t^2$

   a. Encontrar la velocidad y la aceleración de la roca en el instante t.

      $s(t) = 24t - 0,8t^2$

      s´(t)= v(t) = 24 -1.6 t

      v´(t) = a (t) = -1.6

   b. ¿Cuánto tarda la roca en llegar al punto más alto respecto a la superficie?

      Cuando la velocidad es nula, se alcanza el punto más alto.

      v(t) = 24 -1.6 t

      $0 = 24 - 1.6\ t$

      $1.6\ t\ = 24$

      $t = \frac{24}{1.6} = 15\ seg$

   c. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la roca?

      $s(t) = 24t - 0,8t^2$

      $s(t) = 24\ (15) - 0,8\ (15\ )^2$

      s(t) = 360 – 180

      s(t)= 180 m

   d. Determinar el tiempo que tarda la roca en alcanzar la mitad de su altura máxima.

      $s(t) = 24t - 0,8t^2$

      $90 = 24t - 0,8t^2$

      $0.8\ t^2 - 24\ t + 90 = 0$

      $$t = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - \ 4\ (0.8)(90)}}{2\ (0.8)}$$

$$t = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 288}}{1.6}$$

$$t = \frac{24 \pm \sqrt{288}}{1.6}$$

$$t = \frac{24 \pm 16{,}97}{1.6}$$

$$t_1 = \frac{40{,}97}{1.6} \qquad t_2 = \frac{7{,}03}{1.6}$$

$$t_1 = 25{,}6 \qquad t_2 = 4{,}39$$

La suma de estos dos tiempos es el tiempo de vuelo, es 29,99 $\sim 30\ seg$

e. ¿Cuánto tiempo permanece la roca en el aire

Altura máxima cuando, s=0

s(t) = 24.t - 0,8.t²

0 = 24t - 0,8t²

0= 0.8 t(30 – t)

t= 0 30 – t = 0

$\boxed{t = 30 \text{ seg}}$

3. La variación de la carga q en un circuito en función del tiempo t, para $0 \leq t \leq 4$, está dada por $q(t) = t^2 - 4t + 3$, donde $q(t)$ está expresada en microcoulombs (mc) y t en milisegundos (ms). Si se sabe que la corriente i en cualquier instante es la razón de cambio de la carga q con respecto al tiempo, es decir, $i(t) = \frac{dq}{dt}$, donde $i(t)$ está dada en miliamperios (mA)

a. Encontrar la expresión para la corriente i en dicho circuito

$$q(t) = t^2 - 4t + 3$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = 2t - 4\ mA$$

b. Determinar la corriente en el circuito en t = 0,5 ms y t = 4 ms

$i\ (0.5) = 2\ t - 4$ $\qquad$ $i\ (4) = 2\ t - 4$

$i\ (0.5) = 2\ (0.5) - 4$ $\qquad$ $i\ (4) = 2\ (4) - 4$

$i\ (0.5) = -3$ mA $\qquad$ $i\ (4) = 4$ mA

4. El desplazamiento de una cuerda que vibra está representado por:

$s(t) = 10 + \frac{Sen\ (\ 10\ \pi\ t\ )}{4}$ donde $s(t)$ se mide en centímetros y t en segundos.

a. Encontrar una expresión para la velocidad de la cuerda después de t segundos.

$$s(t) = 10 + \frac{Sen\ (\ 10\ \pi\ t\ )}{4}$$

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = \frac{10\ \pi\ Cos\ (\ 10\ \pi t\ )}{4}$$

b. ¿Cuál será la velocidad de la cuerda a los 3 segundos de iniciada su vibración?

$$v(\ 3\ ) = \frac{10\ \pi\ Cos\ (\ 10\ \pi\ (3)\ )}{4}$$

$$v(\ 3\ ) = \frac{10\ \pi\ Cos\ (\ 30\ \pi\ )}{4}\ cm/seg$$

5. Un tanque contiene 2500 galones de agua, los cuales se drenan completamente por un orificio ubicado en el fondo del mismo en 20 minutos. De acuerdo con la Ley de Torricelli, el volumen contenido en el tanque en cualquier instante está representado por:

$V\ (t) = 2500\ (1 - \frac{t}{20})^2$ donde t está expresado en minutos.

a. Encontrar una expresión que represente la rapidez $R(t)$ con la que drena dicho tanque en cualquier instante t, es decir, $\frac{dV}{dt}$.

$$V\ (t) = 2500\ (1 - \frac{t}{20})^2$$
$$\frac{dV}{dt} = R\ (t) = 5000\ (1 - \frac{t}{20})\ \left[\frac{-1}{20}\right]$$
$$R\ (t) = 250\ \left(1 - \frac{t}{20}\right)$$

b. Determine la rapidez de drenaje del tanque para t = 10 y t = 20

$$R\ (t) = 250\ (1 - \frac{t}{20})$$
$$R\ (10) = 250\ (1 - \frac{10}{20})$$
$$R\ (10) = 250\ (\frac{1}{2})$$
$$R\ (10) = 125\ \frac{galones}{seg}$$

$$R\ (t) = 250\ (1 - \frac{t}{20})$$
$$R\ (20) = 250\ (1 - \frac{20}{20})$$
$$R\ (20) = 250\ (0)$$
$$R\ (20) = 0\ \frac{galones}{seg}$$

c. ¿En qué momento el agua del tanque sale por el orificio con una rapidez de 190 $\frac{galones}{minutos}$

. $R\ (t) = 250\ (1 - \frac{t}{20})$

$$190 = 250\ (1 - \frac{t}{20})$$
$$190 = 250\ (\frac{20 - t}{20})$$
$$190 * 20\ = 250\ (\ 20 - t\ )$$
$$3800 = 5000 - \ 250\ t$$
$$250\ t = 5000 - 3800$$
$$t = \frac{1200}{250}$$
$$t = \ 4{,}8\ seg$$